

梁要素の動力学シミュレーションにおける 減衰効果の数値積分に与える影響

高橋 義考

論文要旨

コンピュータの性能向上に伴い、製品開発にシミュレーション技術は不可欠となっている。これはコンピュータの仮想空間で効率よく設計の試行錯誤を行うことができるからである。本論文ではシミュレーション技術の向上を目指し、シミュレーションの過程で行われる数値積分の特性について調査を行った。解析対象物を柔軟な梁要素とし、減衰に関する材料特性がシミュレーションに与える影響を数値的に調査した。調査した結果、解析対象物の減衰特性の増加にともない、適切な数値積分間隔が変化することが確認できた。減衰特性を決める係数と適切な数値積分間隔の関係をグラフで示し、その特徴を明らかにした。

キーワード：シミュレーション、運動解析、数値積分、減衰効果

1. はじめに

コンピュータシミュレーション技術は製品の設計開発に欠かせないツールになっている。これは製品の試作段階にシミュレーション技術を用いることで設計上の試行錯誤を効率よく行うことができるからである。著者はこれまでにコンピュータシミュレーション技術向上を目的に、大変位運動を考慮した柔軟梁要素の運動に関する定式化を提案してきた⁽¹⁻⁴⁾。提案した定式化は大変位運動と梁の柔軟性を考慮しており、特に減衰特性をシンプルな数式で表すことができた。この柔軟要素をシミュレーションする時、柔軟性が数値計算に与える影響はこれまでに述べられているが、大変位運動を伴う減衰効果が数値計算に与える影響については報告されていないようである。そこで、本論文では、材料の減衰効果がシミュレーションの数値積分に与える影響について調査する。時間に関する数値積分間隔の設定はシミュレーションの終了時間に影響を与える。数値積分間隔を短くすると計算精度が上がるがシミュレーション終了時間が遅くなってしまふ。一方、数値積分間隔を大きく設定するとシミュレーション終了時間を短縮できるが計算精度が悪くなり正しい結果が得られない。剛性を有する物体の運動を正しくシミュレーションするためには、その材料特性と数値積分との関係を把握しておくことは重要である。

2. 梁要素の定式化

大変形を伴う弾性梁の動力学解析法として、有限要素法を応用した解析法が研究されている⁽⁵⁻⁸⁾。これらの研究の1つにShabanaら⁽⁹⁻¹⁰⁾によって発表された絶対節点座標による定式化

がある。この手法は質量行列が定数となる特徴を持っている。また、2次元梁要素においては大変位問題にもかかわらず、弾性力が線形有限要素法のように単純な式で定式化できることも明らかにされている⁽¹⁾。そのため絶対節点座標で梁要素を定式化すると、容易にレーレー減衰を導入できる利点がある⁽⁴⁾。ここでは、シミュレーションに用いる運動方程式について説明する。

図1に全体基準枠 $O-XY$ 内におかれた2次元梁の要素を示す。ここで、 l は変形していない初期状態の要素の長さ、 x は初期状態の梁要素を左端から見た注目点の位置である。この梁要素の節点座標ベクトルを、全体基準枠の座標を用いて

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7 \ e_8]^T \quad (1)$$

と表す。以後、行列を表す記号を太字で記述する。要素内の任意点 P の位置ベクトルを形状関数 \mathbf{S} を用いて次式で表す。

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{e} \quad (2)$$

ここで、 r_1, r_2 は全体基準枠から見た梁要素上の注目点 p の位置ベクトル \mathbf{r} の X 座標と Y 座標の成分である。節点座標 e_1, e_2 および e_5, e_6 は、それぞれ全体基準枠 $O-XY$ で記述された点 O' および点 A' における X, Y 座標である。 e_3, e_4 は全体基準枠 $O-XY$ で表された点 O' における変位の空間微分 $\frac{\partial r_1}{\partial x}|_{x=0}, \frac{\partial r_2}{\partial x}|_{x=0}$ であり、 e_7, e_8 は点 A' における変位の空間微分 $\frac{\partial r_1}{\partial x}|_{x=l}, \frac{\partial r_2}{\partial x}|_{x=l}$ である。

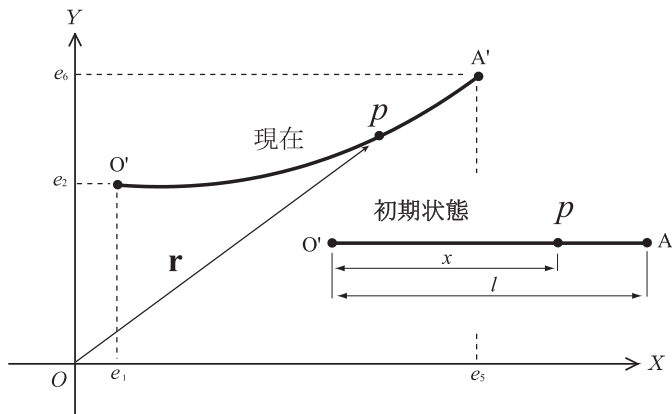


図1 梁要素の位置ベクトル

梁要素の形状関数 \mathbf{S} は、オイラー・ベルヌーイ梁の仮定を用いると次式で表される⁽¹⁰⁾。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 \\ 0 & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ l(-\xi^2 + \xi^3) & 0 \\ 0 & l(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

ここで、 $\xi = x/l$ である。この形状関数で表される梁要素の質量行列は次式となる。

$$\mathbf{M}_1 = A_p l \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & & & & & & & & & & \\ & \frac{13}{35} & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \text{sym.} \\ \frac{11l}{210} & & & & & & & & & & \\ & \frac{11l}{210} & 0 & & & & & & & & \\ 0 & & \frac{l^2}{105} & & & & & & & & \\ \frac{9}{70} & & 0 & & & & & & & & \\ 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & & & & \\ & \frac{9}{70} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & & & & & & \\ & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & & & & & \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & & & & & \\ \frac{-13l}{420} & 0 & \frac{-l^2}{140} & 0 & \frac{-11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & \\ & 0 & \frac{-l^2}{140} & 0 & \frac{-11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & \\ 0 & \frac{-13l}{420} & 0 & \frac{-l^2}{140} & 0 & \frac{-11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & \\ & 0 & \frac{-13l}{420} & 0 & \frac{-l^2}{140} & 0 & \frac{-11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & \\ 0 & \frac{-13l}{420} & 0 & \frac{-l^2}{140} & 0 & \frac{-11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで A_p は梁要素の単位長さあたりの質量である。式 (4) より質量行列 \mathbf{M}_1 は時間に対して不変であることがわかる。この質量行列には梁の太さが考慮されていない。梁の太さの回転慣性に関する質量行列は、断面形状で定義される慣性モーメント I_p を用いて次式で表される。

$$\mathbf{M}_2 = I_\rho l \begin{bmatrix} \frac{6}{5l^2} & & & & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5l^2} & & & & & & & \\ \frac{1}{10l} & 0 & \frac{2}{15} & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{10l} & 0 & \frac{2}{15} & & & & & \\ -\frac{6}{5l^2} & 0 & -\frac{1}{10l} & 0 & \frac{6}{5l^2} & & & & \\ 0 & -\frac{6}{5l^2} & 0 & -\frac{1}{10l} & 0 & \frac{6}{5l^2} & & & \\ \frac{1}{10l} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10l} & 0 & \frac{2}{15} & & \\ 0 & \frac{1}{10l} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10l} & 0 & \frac{2}{15} & \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)と式(5)より梁要素全体の質量行列は次式で求めることができる。

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (6)$$

この質量行列を用い、慣性力 \mathbf{Q}_m は次式で表すことができる。

$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} \quad (7)$$

次に梁要素の弾性力について説明する。梁の軸方向の変形に対する剛性行列は次式で表される。

$$\mathbf{K}_l = \frac{EA}{l} \varepsilon_d \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで E はヤング率、 A は断面積である。 ε_d は変形中の梁の長さ l_d を用いて次式で与えられる。

$$\varepsilon_d = \frac{l_d - l}{l_d} \quad (9)$$

剛性行列 \mathbf{K}_l には時間とともに変化するひずみ ε_d が含まれるため時変となる。したがってシミュレーションでは数値積分ごとに \mathbf{K}_l を計算する必要がある。

梁の曲げ変形に対する剛性行列は次式で表される。

$$\mathbf{K}_l = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & & \\ 6l & 0 & 4l^2 & & & & & & \\ 0 & 6l & 0 & 4l^2 & & & & & \\ -12 & 0 & -6l & 0 & 12 & & & & \\ 0 & -12 & 0 & -6l & 0 & 12 & & & \\ 6l & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 & & \\ 0 & 6l & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで I は断面 2 次モーメントである。曲げ変形に対する剛性行列 \mathbf{K}_l は定数行列である。したがってシミュレーションでは最初に一度だけ剛性行列 \mathbf{K}_l を求めればよい。以上より、梁要素の変形による弾性力 \mathbf{Q}_k は次式で計算できる。

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_l \mathbf{e} + \mathbf{K}_t \mathbf{e} \quad (11)$$

この梁要素の減衰力は次式で与えることができる。

$$\mathbf{Q}_d = (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_l) \dot{\mathbf{e}} \quad (12)$$

ここで α , β はスカラー量の定数である。解析対象物の実際の減衰特性に合わせるようにこの 2 つの値は調整される。絶対節点座標を用いない定式化では質量行列が定数行列で表すことができないが、絶対節点座標による定式化では質量行列 \mathbf{M} 、曲げ剛性行列 \mathbf{K}_l の両方が定数行列として表せるため、このような減衰力が定義できる。

梁要素の運動方程式は慣性力、弾性力、減衰力と梁要素に作用する外力によって、次式のように表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_l) \dot{\mathbf{e}} + (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_t) \mathbf{e} = \mathbf{Q}_f \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{Q}_f は重力を含む外力である。解析対象物の大きさ、柔軟性を考慮して要素分割数を調整して解析モデルを作成する。要素分割をした場合には線形有限要素法と同様に式 (13) の運動

方程式を、対応する節点座標部分で重ね合わせすることで、全体の運動方程式を作成することができる。

3. シミュレーション例

前章で述べた運動方程式を数値積分することで時間とともに位置や姿勢が変化する梁要素の運動をシミュレーションすることができる。ここでは数値積分法に Runge-Kutta 法を用いた。大変位運動を伴う梁要素のシミュレーション結果を次に示す。図2に示すように要素分割数を10個とした梁の中央部分を一定時間押し出し、大変位運動と梁の振動を発生させるシミュレーションを行った。梁に作用する外力の設定を図3に示す。重力の作用はゼロとした。数値積分の時間間隔を0.001秒とした。梁の材料特性は、

$$\begin{aligned} EA &= 10000 \\ EI &= 500 \\ A\rho &= m/l = 1 \\ I\rho &= 10 \end{aligned}$$

とした。この材料定数は、梁要素の定式化を検証するときに用いられているベンチマークモデルを参考とした⁽⁸⁾。減衰特性を与える係数 α 、 β をゼロとした場合のシミュレーション結果を図4に示す。この結果から、外力により梁中央が右側へ押し出され、その勢いによって右側へ等速運動しながら梁が振動している様子が確認できる。次に減衰特性を与える係数 $\alpha = 0.3$ 、 $\beta = 0$ とした場合のシミュレーション結果を図5に、係数 $\alpha = 0$ 、 $\beta = 0.3$ とした場合のシミュレーション結果を図6に示す。この結果から、係数 α は大変位運動に対する減衰効果、係数 β は梁の振動に対する減衰効果があることが分かる。図7は時間に関する数値積分間隔を適切に設定しなかった場合のシミュレーション結果の例を示す。この計算では積分間隔を、正しく計算できる値より大きく設定した。そのため、計算途中で誤差累積により数値の発散が発生している。その結果、対象物の運動を正しくシミュレーションできていないことが確認できる。このように正しいシミュレーション結果を得るための数値積分間隔の限界が存在し、その限界を超えて大きく積分間隔を設定してしまうと正しい結果が得られない。次の章ではこの限界値が梁要素の減衰特性によって受ける影響を調査する。

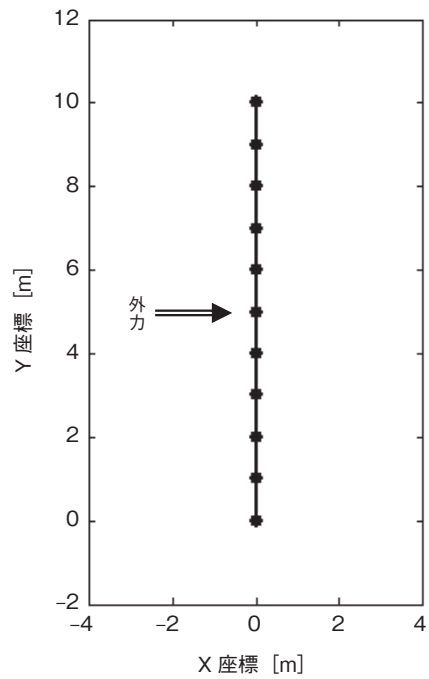


図2 解析モデルの形状と作用する外力

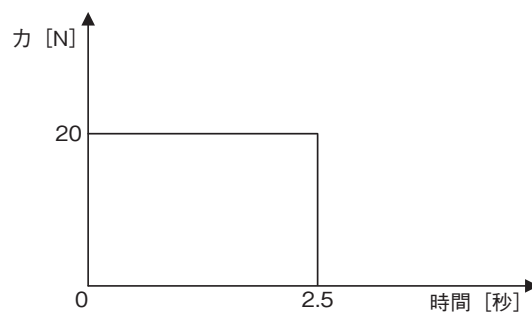


図3 梁に作用する外力

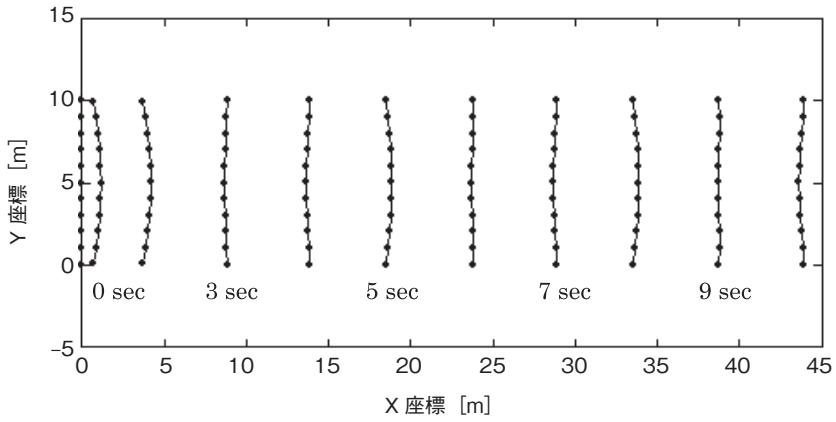


図4 シミュレーション結果 ($\alpha = 0, \beta = 0$)

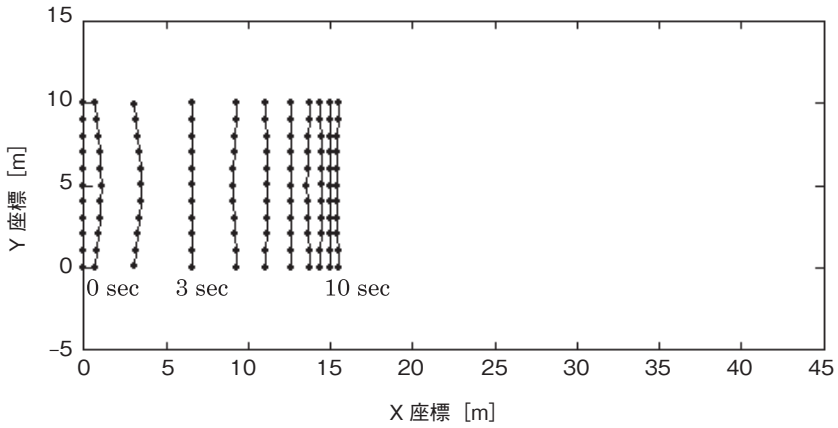


図5 シミュレーション結果 ($\alpha = 0.3, \beta = 0$)

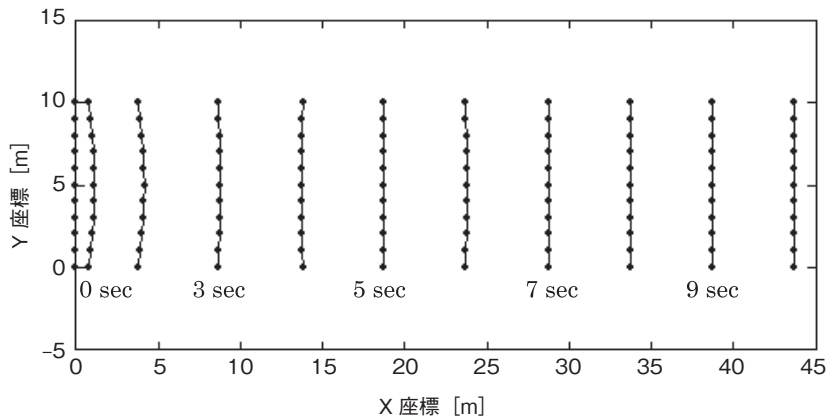


図6 シミュレーション結果 ($\alpha = 0, \beta = 0.3$)

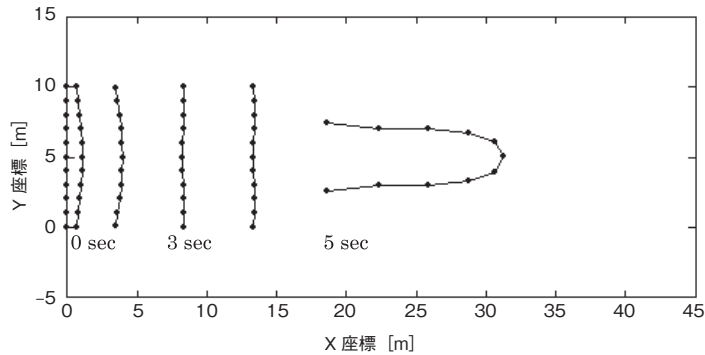


図7 シミュレーション結果（数値積分の時間間隔を不適切に設定した場合）

4. 減衰特性が数値積分に与える影響

シミュレーションにおいて、梁要素の減衰特性が時間に関する数値積分にどのような影響を与えるのか数値的に調査を行った。調査には前章の例題で示した梁モデルを用いた。初めに減衰特性の α の値が数値積分間隔の設定に与える影響を調査した。 α の値を設定し、数値積分間隔(Δt)を十分に小さい値からシミュレーションを試みた。正しく解析できていることを確認してから、徐々に間隔 Δt の設定を大きくしてシミュレーションが破綻するケースを求め、各 α の値に対し正しく計算できる間隔 Δt の限界を明らかにした。調査結果を図8に示す。グラフの横軸は α 、縦軸は数値積分間隔 Δt を表す。図中のグラフが正しくシミュレーションできる数値積分間隔の上限である。グラフの下側が正しくシミュレーションできる領域で、グラフの上側がシミュレーションには不適切な領域を意味する。 α が小さい領域では、減衰効果と数値積分の条件には関係がないことが確認できた。このときの時間間隔の上限は梁要素の剛性、固有振動数に影響を受けていると思われる。しかし、 α がある値を超えると積分間隔の上限が低下しており、これは減衰効果による影響と考えられる。減衰による影響を受けている領域で両対数グラフ上のグラフの傾きが約 -1 であることから、数値積分間隔の上限は α の -1 乗に比例することが分かった。

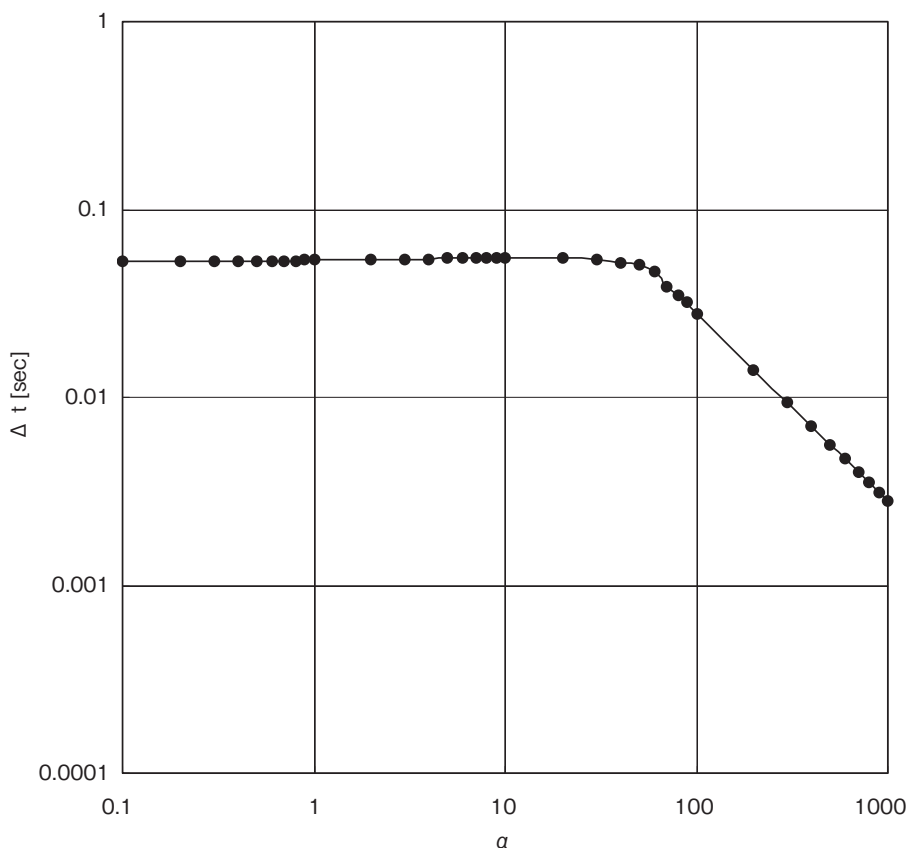


図8 αと正しくシミュレーションできる数値積分間隔の関係

次に減衰特性を与える β の値が数値積分の間隔設定に与える影響を調査した。 β の値は梁要素に発生する振動の減衰に影響を与え、大変位運動には影響を与えない。 α と同様の方法で調査した結果を図9に示す。グラフの横軸が β 、縦軸が数値積分間隔 Δt である。グラフは正しくシミュレーションできる Δt の上限を表しており、グラフの下側が正しくシミュレーションできる領域、上側はシミュレーションに不適切な積分間隔を表している。図9のグラフの形状は図8と似ており、 β が小さい領域では減衰効果は数値積分に与える影響はなく、ある値を界にして積分間隔設定に影響を与えることがわかった。数値積分間隔が β に影響を受ける領域では Δt が β の -1 乗に比例することが確認できた。

図8と図9ではグラフの横軸の値に大きな違いがある。これは例題に用いた材料特性の質量と曲げ剛性の大きさが影響している。減衰力は係数 α に質量行列、係数 β に曲げ剛性行列が作用している。一般的な材料特性として梁の質量より剛性を表す係数の方が桁違いに大きい。そのため実際の工業製品のシミュレーションを行うときには、 α よりも β の値が数値計算に与える影響が大きいことになる。

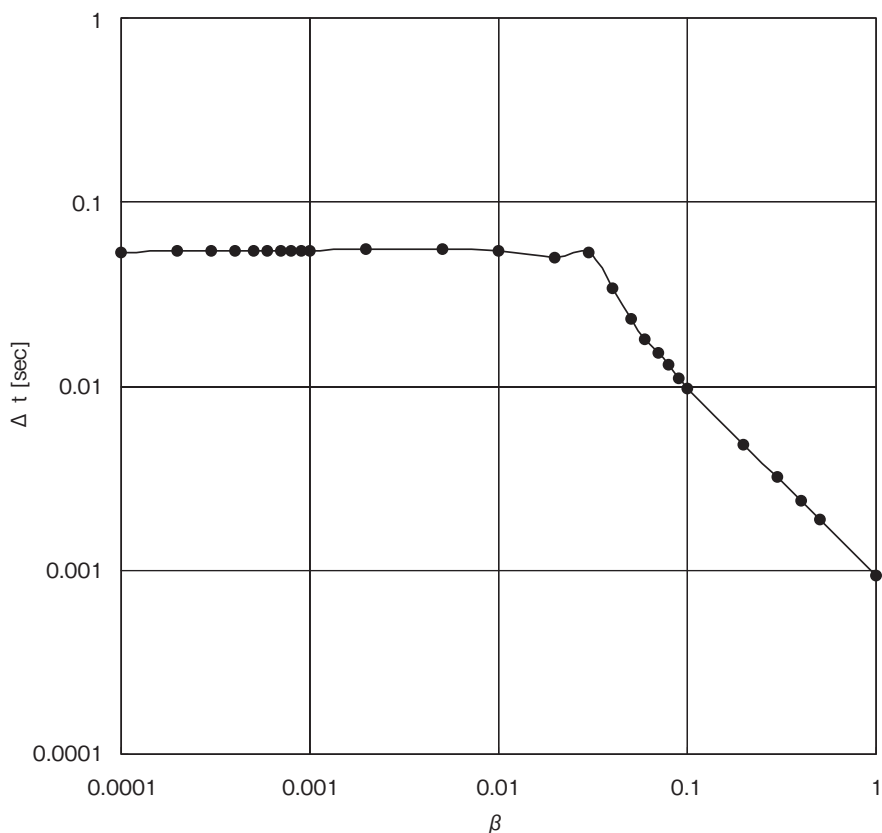


図9 β と正しくシミュレーションできる数値積分間隔の関係

5. おわりに

本論文では、減衰効果がシミュレーションの数値積分に与える影響を調べることを目的に、減衰特性を決める係数と時間に関する数値積分間隔の関係を調査した。調査では単純な梁モデルを用い大変位運動と梁の振動が含まれるシミュレーションを行った。調査の結果、梁の減衰特性を決める2つの係数が、正しい解析結果を得るための数値積分間隔に与える影響を確認することができた。減衰特性を決める係数が小さい場合には数値積分に与える影響は無いものの、係数がある値を超えると係数の -1 乗に比例して影響を与えることが新たに分かった。実際のシミュレーションを行うときに減衰特性の大きさに応じて数値積分の間隔を調整する必要がある、今回の調査結果はその調整の参考にすることができる。

本調査では1つの形状モデル、外力設定しか行っていない。想定外の力が作用したときや、解析対象物の形状、要素分割数によって、今回の調査結果がどのような影響を受けるのかは確認で

きておらず、今後の課題としたい。

参考文献

1. 高橋義考, 清水信行, Absolute Nodal Coordinate法による梁の多体動力学解析に関する研究(有限変位・微小歪とした時の弾性力の導出), 日本機械学会論文集(C編), **67**-655, pp.626-632, (2001).
2. 高橋義考, 清水信行, Absolute Nodal Coordinate法による梁の多体動力学解析に関する研究(Mean Axisの導出とその応用), 日本機械学会論文集(C編), **67**-660, pp.70-75, (2001).
3. 高橋義考, 清水信行, 鈴木浩平, 絶対節点座標アプローチにより定式化された梁要素による骨組構造物のモデル化に関する研究, 日本機械学会論文集(C編), **70**-699, pp.113-121, (2004).
4. 高橋義考, 清水信行, 鈴木浩平, 絶対節点座標アプローチにより定式化された柔軟マルチボディダイナミクスにおける梁要素の減衰行列に関する研究, 日本機械学会論文集(C編), **69**-685, pp.1-8, (2003).
5. P.W.Likins, Modal Method for Analysis of Free Rotations of Spacecraft, AIAA Journal, **5**-7, pp.1304-1308, (1967).
6. B.F.De Veubeke, The Dynamics of Flexible Bodies, International Journal for Engineering Science, **14**, pp.895 - 913, (1976).
7. O.P.Agrawal, A.A.Shabana, Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Component Modes, Computer and Structures, **21**, pp.1303-1312, (1985).
8. J.C.Simo and L. Vu-Quoc : On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions - The Plane Case : Parts 1 and II , ASME Journal of Applied Mechanics , **53**, pp.849 - 863, (1986).
9. A.A.Shabana, An Absolute Nodal Coordinate Formulation for the Large Rotation and Deformation Analysis of Flexible Bodies, Technical Report #MBS 96- 1-UIC, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago, (1996).
10. A.A.Shabana, H.A.Hussien , J.L.Escalona, Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Large Rotation and Large Deformation Problems, ASME Journal of Mechanical design, **120**, pp.188-195, (1998).

(たかはし よしたか/コンピュータシミュレーション)